IV. *Principia Dynamica, ſive Principia Mechanices Metaphyſica*; *Auctore* Jacobo Jurin, *M. D. R. S. S.*

Preſented at a Meeting of the Royal Society, March 13. 1746.

CUM vir illuſtris *G. G. Leibnitius* novam ſuam ſententiam, quâ vim corporis in motu conſtituti quadrato velocitatis metiendam ſtatuit, in *Actis Eruditorum Lipſienſibus*, anno 1686, cum publico communicaſſet, magnam illico ea res in orbe mathematico controverſiam excitavit.

Novam itaque iſtam doctrinam cum plures certatim aggrederentur, vix autem quiſquam amplecteretur e mathematicis celebrioribus, anno 1695. menſe *Aprili*, eandem auctor edito *Specimine Dynamico* confirmare conatus eſt. Ubi, inter alia multa, hæc habet:

" Porro ad veram virium æſtimationem, & quidem " prorſus eandem, diverſiſſimis itineribus perveni: " uno quidem a priori, ex ſimpliciſſima conſideratione " ſpatii, temporis, & actionis (quod alias exponam) " altero a poſteriori, vim ſcilicet æſtimando ab ef- " fectu quem producit ſe conſumendo."

Videbatur autem in animo habere vir clariſſimus viam illam a priori, quam ſe *alias expoſiturum* hic promittebat, menſe *Majo* ſequente in publicum edere, cum ſub finem *Speciminis* hujus *Dynamici* hæc verba addiderit:

" Sed nunc fugatis erroribus, veras & ſane admi- " randas naturæ leges paulo diſtinctius in Schediaſma- " tis hujus parte ſecunda proponemus menſe *Majo* " exhibenda."

Atqui, quod magnopere dolendum, ſecunda illa pars neque menſe *Majo*, neque ullo ex ſequentibus aut menſibus aut annis, etſi plus quam viginti annos ſupervixerit *Leibnitius*, aut in *Actis Lipſienſibus*, aut alibi uſpiam in publico comparuit.

Sed ne quis forte putet promiſſum iſtud idcirco non fuiſſe præſtitum, quod fidei ſuæ liberandæ non eſſet magnus ille vir, factum eſt edito noviſſime *Commercio Literarum* inter ipſum *Leibnitium*, & alterum illum celeberrimum mathematicum, *Johannem Bernoullium*.

Bernoullius nempe, viſo eo *Specimine Dynamico*, literis ad *Leibnitium* datis menſe *Junio* ſequenti, quædam laudavit, ſed virium æſtimationem *Leibnitianam* adeo non probavit, ut etiam conaretur demonſtrare vires corporum motorum, non quadratis celeritatum, ſed ipſis celeritatibus eſſe proportionales.

Tandem vero re per literas ultro citroque datas diligentius excuſſa, prorſus in *Leibnitii* caſtra tranſivit *Bernoullius*.

Is ergo, tanti diſcipuli docilitatem remunerari certus, communicat argumentum a priori ductum, quod hactenus apud ſe preſſerat, ſimulque cauſam docet quare id prius non vulgaverit.

" Nolui, (*a*) inquit, illos dignari hac liquida luce " veritatis, qui argumenta illa, ab affectibus gravium " vel aliorum corporum ſenſibilium petita, non ut " par eſt accepere ; unde nec publice extare volui; ut " eſſet quod illis communicarem, qui ſeſe æquos ju- " dices præbuiſſent."

Bernoullius

(*a*) Menſe *Januario*, 1696.

Bernoullius itaque, cum *ſeſe æquum judicem præbuiſſet*, & argumenta illa a poſteriori, *uti par erat*, *accepiſſet*, hoc eſt, deſcendiſſet prorſus in ſententiam *Leibnitianam*, dignus utique habitus eſt, qui in interiora illa ſcientiæ adyta admitteretur.

" Quoniam, (*a*) inquit auctor, te in noſtris caſtris " video, lubenter communicabo principium meum a " priori demonſtrandæ veræ æſtimationis virium; " quod mihi in promptu eſſe aliquoties indicavi, non- " dum tamen hactenus produxi. Tibi enim commu- " nicare eſt frugiferæ maxime terræ commendare " granum, ut in magnam plantam ſurgat."

Laudo ſane, quod *granum* iſtum *terræ* tam *frugiferæ commendaverit* vir optimus, & tamen ejus conſilium non omni videtur reprehenſione caruiſſe. Nam etſi *Papinos*, *Catelanos*, reliquoſque ſuæ doctrinæ oppugnatores, apud quos, propter incredulitatem, nihil magni poterat efficere, qui *inconvertibiles quantiſcunque demonſtrationibus viderentur*, ſi illos, inquam, *hac liquida luce veritatis* indignos judicaret, cur tamen illam reliquo orbi literato invideret? Mitto dicere, quod viri boni & humani, & incrementi ſcientiarum ſtudioſi erat, rem tanti momenti omnibus patefacere. Quod ſi omnibus aliis rebus poſthabitis, gloriæ tantum ſuæ conſulere libuiſſet, hoc erat faciendum, quo facto obtrectatores iſti aut illico ad ſilentium redacti, aut ab omnibus fuiſſent condemnati. Denique cum non ſibi ſolum, nec uni alterive amico, ſed omnibus, nati ſint magni viri, quæ iſta eſt iniquitas, velle *Johannem Bernoullium*, & diſcipulos *Bernoullianos*, ea luce liquida

(*a*) Menſe *Januario*, 1696

liquida frui ſolos, cum interim nos alii homunciones ætatem degeremus in tenebris pluſquam *Cimmeriis*? Sed bene habet, quod poſt quinquaginta annos tenebrarum lux illa jam omnibus illuceſcit.

" Ecce Argumentum.

" Actio faciens duplum, tempore ſimplo, eſt dupla, " virtualiter actionis facientis idem duplum tempore " duplo; ſeu percurſio duorum milliarium, intra ho- " ram, eſt dupla (virtualiter) percurſionis duorum " milliarium, intra duas horas.

" 2°. Actio faciens duplum, tempore duplo, eſt " dupla, formaliter, actionis facientis ſimplum tem- " pore ſimplo; ſeu percurſio duorum milliarium, " intra duas horas, eſt dupla (formaliter) percurſionis " unius milliaris, intra unam horam.

" 3°. Ergo actio faciens duplum tempore ſimplo " eſt quadrupla actionis facientis ſimplum tempore " ſimplo; ſeu percurſio duorum milliarium, intra " unam horam, eſt quadrupla percurſionis unius mil- " liaris, intra unam horam.

" 4°. Si pro duplo ſubſtituiſſemus triplum, qua- " druplum, quintuplum, &c. prodiiſſet actio noncu- " pla, ſedecupla, 25pla; & generaliter patet actiones " motrices æquabiles, æquitemporaneas, æqualium " mobilium, eſſe ut quadrata celeritatum; vel, quod " idem eſt, in eodem, vel æquali corpore, vires eſſe " in duplicata ratione celeritatum. Q. E. D."

Perlecto hoc argumento, & ob magnam auctoris famam attentiſſime conſiderato, ego, ut verum fatear, ne ſcintillam quidem veritatis, aut etiam ſenſus communis, ibi potui animadvertere. Suſpicarer ſane id oculorum meorum vitio fieri, qui forte in nimia luce cæcutirent,

cæcutirent, niſi animos addidiſſet ipſius *Bernoullii* dubitatio.

Vir ille acutiſſimus *liquidæ* iſti *veritatis luci* adeo non acquievit, ut in literis ſuis reſponſoriis non ſolum objectionem moverit, ſed etiam demonſtrationem, & quidem duplicem, in contrarium produxerit.

" Non video, (*a*) inquit, quid ab adverſario in " contrarium dici poſſit; niſi forte quod actio virtua- " lis confundi videatur cum actione formali; negando " ſcilicet conſequi *A* eſſe quadruplum ipſius *C*, ex " eo quod *A* ſit dupla ipſius *B*, virtualiter, & *B* dupla " ipſius *C*, formaliter."

Hac propoſita objectione, ſubjungit deinde ſuas demonſtrationes.

" 1°. Actio faciens duplum tempore ſimplo eſt " dupla virtualiter actionis facientis idem duplum " tempore duplo."

" 2°. Actio faciens duplum tempore duplo eſt " ſimpla virtualiter actionis facientis ſimplum tem- " pore ſimplo.

" 3°. Ergo actio faciens duplum tempore ſimplo, " eſt dupla actionis facientis ſimplum tempore ſim- " plo. Vel ſcilicet,

" 1°. Actio faciens duplum tempore ſimplo eſt " ſimpla formaliter actionis facientis idem duplum " tempore duplo.

" 2°. Actio faciens duplum tempore duplo, eſt " dupla formaliter actionis facientis ſimplum tempore " ſimplo.

" 3°.

(*a*) *Februario*, 1696.

" 3°. Ergo actio faciens duplum tempore ſimplo,
" eſt dupla actionis facientis ſimplum tempore ſimplo.
" Vides duo argumenta, quæ idem plane conclu-
" dunt, ſed tuæ concluſioni omnino contrarium, &vul
" gari illo nituntur axiomate, quæ eidem ſunt æqualia
" ſunt inter ſe æqualia; quod quidem tantummodo
" locum habet in quantitatibus homogeneis, ut hic
" comparando actionem virtualem cum virtuali, &
" formalem cum formali, non autem illam cum hac."

Hæc *Bernouillius* acumine non minori, quam modeſtia. *Leibnitius* vero literis menſe *Martio* datis, primo loco objectionem *Bernoullianam* diluere conatur.

" Satis non video, inquit, quid tibi velis, cum
" dicis actionem virtualem confundi cum formali.
" Non enim actio mihi hic eſt virtualis vel formalis;
" ſed una actio alterius eſt dupla, vel virtualitet, vel for-
" maliter. Nimirum virtualiter, cum dupla eſt æſtima-
" tione, etſi non ſit dupla mole, vel congruentia, ut du-
" catus eſt duplus thaleri: Formaliter vero, ut thalerus
" duplum eſt ſemithaleri. Et ſciendum eſt quod
" duplum eſt formaliter, id etiam virtute ſeu æſtima-
" tione eſſe duplum. Ideo cum nonniſi de virtute,
" ſeu æſtimatione, hic quæratur, nulla eſt confuſio
" diverſi generis quantitatum vel æſtimationum;
" nempe virtualiter duplum intelligo quod tale eſt
" virtualiter ſolum; ſed formaliter duplum voco,
" quod ſimul & formaliter & virtualiter duplum eſt."

Non diffitendum ſane quod ſuo jure utitur *Leibnitius*, tribuendo eum quem velit ſenſum vocibus a ſe uſurpatis, quodque hoc pacto plane diluit objectionem *Bernoullianam*. Id unum vellem clare expoſuiſſet, vel ultro, vel poſtulante *Bernoullio*, qua virtute, vel qua æſtimatione, actio faciens duplum

tempore ſimplo ſit dupla actionis facientis idem duplum tempore duplo. Id enim, niſi me admodum fallit, inter falſiſſima reponendum eſt.

Pergit vir cl. " Poteram vocabulis (tantum harmoniæ cujuſdam cauſa adjectis) abſtinere; ut enim " quia ducatus duplus eſt thaleri, & thalerus ſemi- " thaleri, concludo ducatum ſemithaleri quadruplum " eſſe; ita quia percurſio 2 milliarium, una hora, " dupla eſt percurſionis 2 milliarium, 2 horis, & per- " curſio 2 milliarium, 2 horis, dupla eſt percurſionis " unius milliaris, una hora; ſequetur percurſionem " 2 milliarium una hora eſſe quadruplum percurſio- " nis unius milliaris, una hora."

Sublatis jam turbatricibus iſtis vocibus, *virtualiter*, & *formaliter*, quæ limpidum hunc veritatis fontem hactenus coinquinaverant, non modo ſuſtulit *Leibnitius* objectionem a *Bernoullio* propoſitum, ſed eum penitus ad ſuas partes pertraxit. " Tua reſponſio (inquit " ille in proximis literis) mihi nunc plane ſatisfacit; " video enim, quid duo iſti termini tibi ſignificent: " cæterum argumentatio tua mihi videtur elegantiſ- " ſima, & publico non amplius invidenda; multum " enim ponderis tribuet argumentis a poſteriori.".

Hæc *Bernoullius* in literis menſe *Aprili* datis, & ego quidem eidem argumento pariter acquieſcerem, ſiquis mihi monſtret æque clarum eſſe percurſionem 2 milliarium, una hora, duplam eſſe percurſionis 2 milliarium 2 horis, atque clarum eſt ducatum eſſe duplum thaleri. Video enim duplo velociorem eſſe percurſionem 2 milliarium, una hora, percurſione 2 milliarium, 2 horis: duplam eſſe non video, ſed æqualem, cum idem ſpatium utraque percurſione conficiatur.

Sed

Sed forte rem ulterius urgere noluit idcirco *Bernoullius*, quod ſolito commotiorem ſeſe oſtendiſſet *Leibnitius*. " Ego, (*a*) inquit ille, nihil magni " promittere auſim; ſperabam tamen reus non fieri " paralogiſmi apertiſſimi, in argumentatione, non " obiter elapſa, ſed a compluribus annis conſiderata, " quam tamen alicujus momenti venditaram." Cujus tamen *apertiſſimi paralogiſmi Leibnitium* apertiſſime reum eſſe, nos, ni animus multum fallit, infra oſtendemus.

Demonſtrationis utriuſque *Bernoullii* examinationi *Leibnitianæ* non opus eſt immorari, quod pendeat utraque demonſtratio ex ſenſu vocum, *virtualiter*, & *formaliter*, ſecus accepto quam vellet *Leibnitius*. " Eos, (*b*) inquit *Bernoullius*, ſumebam terminos alio " ſenſu quam eo quo nunc eos explicas."

Leibnitius vero, incertus adhuc quid ponderis habitura eſſet apud *Bernoullium* prima ſua demonſtratio, alteram eidem ſubjungit. " Aliam, (*c*) inquit, addo, " quæ, ſi fundum rei ſpectes, redit in priorem, habet " tamen ſuum proprium pondus. Actiones motrices " (æquabiles intelligo) ejuſdem mobilis ſunt in ratione " compoſita effectuum immediatorum, nempe longi- " tudinum percurſarum, & velocitatum. Porro lon- " gitudines (æquabiliter percurſæ) ſunt in ratione com- " poſita temporum & velocitatum. Ergo actiones " motrices ſunt in ratione compoſita ex ſimplice " temporum & duplicata velocitatum; ideoque iiſdem " temporibus, vel temporum elementis, actiones mo- " trices ejuſdem mobilis ſunt in ratione duplicata " velocitatum, vel, ſi diverſa ſint mobilia, in ratione " compoſita

(*a*) Mart. 1696. (*b*) Apr. 1696. (*c*) Mart. 1696.

" compoſita ex ſimplice mobilium & duplicata velo-
" citatum."

Bernoullius in literis menſe *Aprili* ad *Leibnitium* datis, cum ſeſe priori demonſtrationi acquieſcere dixiſſet, de poſteriore autem ne verbum quidem faceret, quæſivit ex eo *Leibnitius* menſe *Majo*, " quid illi videretur de altera ejuſdem pro-
" poſitionis demonſtratione. Quæ (inquit) paulo
" magis eſt ad formam receptam, etſi ambæ conve-
" niant in radice."

Bernoullius itaque, cum jam effugere non poſſet, quin mentem ſuam aperiret, in literis menſe *Junio* datis hæc habet.

" Altera tua demonſtratio propoſitionis de ra-
" tione actionum motricium, quam in prioribus al-
" legâſti, ingenioſe pariter ac prior, &, ut dicis,
" magis ad formam excogitata mihi videtur, quam-
" vis in fundo rei ambæ coincidant. Nihil etiam
" enim mihi certius eſt, quam quod actiones mo-
" trices debeant menſurari per effectus ſuos immedia-
" tos; ſi itaque longitudines percurſæ, & velocitates
" (niſi quis obſtinate vellet velocitatem potius eſſe
" cauſam) ſint effectus actionis immediati, & quidem
" ſoli, quorum unum ab altero non dependet, vel
" in altero non includitur, erunt actiones motrices
" neceſſario in ratione compoſita longitudinum &
" velocitatum; adeoque temporibus æqualibus in du-
" plicata velocitatum."

Patet *Bernoullium* hoc reſponſo demonſtrationem illam alteram *Leibnitianam* ſpecie quidem probare, reipſa, quamvis cum ſumma cautione & modeſtia, damnare. Nec enim ſolum ſubinnuit velocitatem eſſe cauſam potius, quam effectum actionis, ſed aſſenſum ſuum ea conditione aſtringit, ut effectuum

a *Leibnitio* poſitorum, nempe longitudinis percurſæ & velocitatis, *unus ab altero non dependeat, vel in altero non includatur*. Cum igitur ſit evidentiſſimum, pendere longitudinem percurſam a velocitate, & in illa includi, patet iſtam demonſtrationem vitioſam eſſe judice *Bernoullio*.

Leibnitius proximis literis menſe *Junio* datis, cum ad alia plura copioſe & diſtincte reſponderet, ad tacitas haſce objectiones *Bernoullianas*, diſſimulata earum vi, quaſi aliud agens, hoc unum repoſuit.

" Cæterum, ut actionem nunc, compoſita ratione
" ſuorum principiorum, potentiæ & temporis, æſtimo;
" ita eam paulo ante æſtimaveram compoſita ratione
" corum quæ præſtat; effectus ſcilicet extenſivi ſeu
" materialis, nempe longitudinis (quem κατ' ἐξοχὴν
" effectum vocare ſoleo) & effectus intenſivi ſeu for-
" malis. Deſideratum enim eſt, ut præſtetur multum
" & cito. Ambæ autem æſtimationes conſentiunt
" inter ſe, ut vides."

Per obſcuritatem hujus reſponſi, ſive affectatam, ſive *Leibnitio* naturalem, facile cernitur eum velle ut velocitas pro effectu actionis habeatur, quam *Bernoullius* pro cauſa potius habendam ſubinnuerat, non audere tamen eam diſerte nominare, licet eam intelligat ſub nomine effectus inſenſivi ſeu formalis, quem *præſtet* actio. Porro de altera objectione *Bernoulliana*, nimirum, quod etiamſi velocitas vel maxime ſit effectus actionis, pariter atque longitudo percurſa, tamen cum alter horum effectunm ab altero dependeat, vel in altero includatur, et certe pendet longitudo percurſa a velocitate, actio menſurari non debeat per effectus iſtos, de hac, inquam, altum hic ſilentium.

Actum itaque videtur de altera illa demonſtratione, *Leibnitio* ipſo judice, pariter atque *Bernoullio*; & ſane

in

in ſequentibus eorum literis ne minimam quidem ejus mentionem factam reperio.

Porro, prior illa demonſtratio, quæ eodem recidit cum poſteriori, vera ſcilicet cum falſa, non videtur omni ſcrupulo caruiſſe, neque apud *Bernoullium*, neque apud ipſum *Leibnitium*.

Bernoullius enim, etſi menſe *Aprili* profeſſus ſit eam ſibi *plane ſatisfacere, eique acquieverit, elegantiſſimam* vocaverit, *& publico non amplius invidendam*, tamen *Auguſto* menſe neſcivit quid ſibi vellet *Leibnitius* per vocem *actionis*, ex qua pendet tota illa demonſtratio. " Oportet, inquit, ut definias quid " per actionem intelligas; alias nihil unquam de- " monſtrari poterit." Æquum ſane monebat, fruſtra tamen; nam in literis *Leibnitii* reſponſoriis, utut ſatis prolixis, ne γρῦ quidem videas de illa definitione tantopere neceſſaria.

Leibnitius autem ipſe, in literis menſe *Junio* datis, hæc habet: " Mea demonſtratio a priori, pro noſtra " virium æſtimatione, nititur utique aliqua ſuppoſitione. " Nempe, *Actionem quæ facit aliquid uniformiter,* " *tempore ſimplo, eſſe duplam actionis facientis idem* " *uniformiter, tempore duplo.* Hanc ſuppoſitionem " concedere debent *Catelanus*, & alii, cum quibus diſ- " putaveram." Quid ſi nolint? Corruit ergo demonſtratio, quæ nititur hac ſuppoſitione, ſaltem niſi ſuppoſitionem iſtam prius demonſtres.

At " Nondum quidem inveni modum a priori hanc " propoſitionem demonſtrandi per viam congruentiæ; " imo, ne hanc quidem, quod *actio idem faciens,* " *breviori tempore, ſit major*; a quo eſſet incipien- " dum."

Itaque cum tantopere deprædicata illa demonſtratio a priori indigeret alia demonſtratione, quam nondum invenerat *Leibnitius*, nec unquam poſtea invenit, nec inventurus eſt quiſquam mortalium, minime mirandum *granum* iſtud, utut *frugiferæ maxime terræ commendatum*, *in plantam* non *ſurrexiſſe*. *Bernoullius* quippe *liquidæ* iſti *veritatis luci*, cum cerneret dilapſam in cineres facem, longum vale dixit.

At illo longe animoſior vir celeberrimus, *Chr. Wolfius*, theoriam virium a priori, geometrarum more, pertractare aggreſſus, eam, in primo tomo *Commentariorum Academiæ Imperialis Petropolitanæ*, cum publico communicavit, ſub titulo *Principiorum Dynamicorum*. Hujus partem " *cum anno* 1710. *cum Il-*
" *luſtriſſimo Comite ab Herberſtein, Illuſtri Leibnitio,*
" *atque aliis communicâſſet, eam Leibnitius in ſuam*
" *cum viris celeberrimis Johanne Bernoullio atque*
" *Jacobo Hermanno aliiſque communicatam, recidere*
" *ſcripſit anno* 1711. *datis literis dicto fidem his ver-*
" *bis faciens :* Calculum virium purarum ſeu actionum
" talem inſtituo. Sit ſpatium *s*, tempus *t*, velocitas
" *v*, corpus *c*, effectus *e*, potentia *p*, actio *a*. In
" motu æquali erit *tv* ut *s*, *e* ut *cs*, *tp* ut *a*. Atque
" hæc quidem ſine demonſtratione aſſumi poſſunt.
" Accedit, quod demonſtrandum, *ev* ut *a*. Hinc
" porro plurima theoremata demonſtrari poſſunt, *e.gr.*
" *p* ut cv^2. Nam *tp* ut *ev:* ſed *e* ut *cs*, & *s* ut *tv*.
" Ergo fit *tp* ut ctv^2, ſeu *p* ut cv^2. Atque in his con-
" tinetur pars meorum Dynamicorum, abſtracta
" maxime a rebus ſenſibilibus, etſi deinde per experi-
" menta verificetur." " Nullus itaque dubito (inquit
" *Cl. Wolfius*) me hic principia Dynamicæ menti
" *Leibnitii* conformia propoſuiſſe."

Atque

Atque hoc quidem per ſe clarum eſt, cum theoremata *Wolfiana* cum notulis algebraicis *Leibnitii* adamuſſim conveniant; utrum vero veritati, pariter atque menti *Leibnitii*, conformia ſint ea principia, operæ pretium eſt examinare. Cæterum iſtud præcipue dignum notatu in hiſce notulis reperio, *a* ut *ev*, *quod demonſtrandum*: unde videtur *Leibnitius*, ne tum quidem, poſt 16 annos elapſos, inveniſſe demonſtrationem ſuppoſitionis olim *Bernoullio* venditatæ; nempe, quod actio faciens aliquid, tempore ſimplo, dupla eſt actionis facientis idem tempore duplo, cum actio faciens aliquid tempore ſimplo duplo velocius id faciat, quam actio idem faciens tempore duplo. Quomodo autem iſtud demonſtret *Wolfius*, mox examinabimus.

Nos enim, cum illuſtriſſima academia ſcientiarum imperialis *Petropolitana* tres priores ſuorum commentariorum tomos dono mittere dignata eſſet, & ſimul ſignificandum curâſſet non ingratum ſibi fore, ſi aliquid ſubinde ex cogitatis noſtris, commentariis inſerendum communicare vellemus, jam uno ſcripto miſſo, quod ad noſtram tuborum capillarium actionis theoriam pertinebat, eoque benigne ab illuſtriſſima academia excepto, & in commentariis publicato, brevi poſt tempore aliud eidem obtulimus ſub titulo *Principiorum Dynamicorum*.

Quod enim videbam celeberrimum *Wolfium* ea jam clare, & diſtincte, & in morem geometricum explicata proponere, quæ ab ipſo *Leibnitio* minus perſpicue erant tradita, quam ut facile cerneretur, quid veri ineſſet, aut falſi; & tamen in ſumma rerum alteri cum altero adamuſſim convenire; occaſionem arripere viſum eſt iſtius theoriæ ad examen accuratum revocandæ.

Hunc

Hunc in finem ea omnia, quæ putabam recte tradidiſſe *Wolfium*, ad verbum exſcripta, *Principiis* meis *Dynamicis* inſerui; quæ deerant, ſupplevi; quæ falſa videbantur, correxi, atque id ſcriptum 12 abhinc annis, ea qua par erat obſervantia imperiali academiæ obtuli.

Lectum id ſcriptum in publico conventu, eoque nomine grates agi mihi juſſiſſe academiam, ex literis clariſſimi *Mulleri*, tunc temporis *Petropoli* abiturientis ad expeditionem *Kamkatſchianam*, intellexi.

Poſtea vero, cum per tot annos nullam illius ſcripti mentionem fieri viderem in commentariis, tandem anno ſuperiore per amicum, quid eo factum eſſet, quæſivi. Is mihi primo reſpondit nullum ejuſmodi ſcriptum ad academiam perveniſſe. Reſcripſi, rite tuiſſe traditum, lectumque in publico conventu, menſe *Junio* anni 1733, grateſque eo nomine mihi actas. Tum demum inſpecto protocollo academico, id verum eſſe repertum eſt, ſcriptum vero ipſum nullibi comparuit, nec ſciebat quiſquam quo caſu intercidiſſet. Poteſtatem vero mihi fecit illuſtriſſima academia, novum, ſi vellem, exemplar *Petropolin* mittendi, commentariis inſerendum; vel, ſi id mallem, in actis noſtris philoſophicis publicandi.

Excuſſis itaque meis ſcriniis, exemplar perfectum iſtius ſcripti nullibi reperiebam, ſive quod aliquo caſu intercidiſſet in domicilio bis mutando, ſive quod unum iſtud confectum eſſet quod miſeram *Petropolin*. Imperfectum vero exemplar reperi, quod, ut potui, ſupplevi, jamque meliori, ſpero, fato, Societati Regiæ *Londinenſi* dono, dedicoque.

Principia Dynamica.

Accidere non raro cernitur inter litigantes, ut res a principio ſatis facilis & expedita, malitia tamen patronorum per omnes legum ambages & laqueos altercantium, in difficillimam tandem & pene inextricabilem abeat controverſiam. Tunc autem, ſi quis juriſconſultus viam aliquam brevem & claram oſtenderit, qua res ad exitum perduci queat, videtur is mihi de utraque parte non peſſime mereri, ſive juſtiorem, ſive etiam ſequiorem cauſam tueri, eidem contigerit.

Talem judico ſeſe præſtitiſſe celeberrimum *Chriſtianum Wolfium* in illa controverſia de vi motrice, quæ jam a multis annis orbem eruditum occupavit. Is enim, ſi ipſe verum non ſit aſſecutus, rationem certe monſtravit, qua alii ad verum & tuto & facile pervenire poſſint.

Hujus itaque, & illuſtriſſimi *Leibnitii*, quem is ſe ducem ſequi profitetur, veſtigiis inſiſtens *Principia Dynamica*, ut ipſorum verbo utar, quam fieri poteſt perſpicue, exponere conabor.

Quem in finem non niſi caſum ſimpliciſſimum conſiderare decrevi, corporis vi viva prædita, quod movetur motu uniformi, *h. e.* ſine omni impedimento ſive medii reſiſtentis, ſive corporum quorumcunque oppoſitorum, plane ſecundum poſitiones *Wolfianas*. De quo clariſſimo viro ſi me tum definitiones & axiomata, tum ipſas propoſitiones ſequentes, præter unam aut alteram, & earum demonſtrationes, ne verbo quidem mutato, ſumpſiſſe mutuo animadvertat lector ingenuus, ſciat ille velim me id conſulto feciſſe, quod eas neque clarius enuntiari poſſe exiſtimem, neque certius demonſtrari.

Definitio

Definitio 1.

" *Vim vivam* cum *Leibnitio*, vel etiam ſimpliciter *vim* appello, quæ motui locali adhæret.

Definitio 2.

" *Vis pura* eſt, cui in agendo contraria nulla reſiſtit."

Corollarium.

" Vis igitur pura toto actionis tempore invariata manet."

Scholion.

" Iſtiuſmodi vis in motu æquabili ſeſe exerit, ſi concipiatur fieri in medio non reſiſtente. Quantocunque enim intervallo mobile promoveatur, eadem tamen ſemper ſubſiſtit celeritas, conſequenter vis motrix eadem. Effectus adeo, quem producit, eam minime abſorbet."

Definitio 3.

" *Actio pura* dicitur, quæ exercetur vi motrice pura."

Scholion.

" Talis eſt actio mobilis motu æquabili lati in medio non reſiſtente."

Definitio 4.

" Actio uniformis eſt, quæ duplo tempore dupla, triplo tripla, & ita porro, ſeu in genere, quæ eſt ut tempus."

Scholion.

" Iſtiuſmodi actio in motu æquabili locum habet, ubi mobile continuo eadem celeritate moveri pergit, ſi nempe motus fieri concipitur in medio non reſiſtente."

Definitio

Definitio 5.

" *Effectus vis motricis extra conflictum* eſt tranſlatio
" mobilis per ſpatium."

Axioma 1.

" Si duo, vel plura mobilia æqualia æquali celeri-
" tate moveantur, vis eorundem eadem eſt."

Axioma 2.

" Eadem vi eodem tempore eadem abſolvitur
" actio."

Scholion.

" Eadem vi longiori tempore majorem abſolvi
" actionem quam breviori, & contra eodem tempore
" vi majore actionem majorem abſolvi quam minori,
" nemo dubitat. Quantitas adeo actionis pendet a
" quantitate virium & temporis. Quamobrem, ſi vires
" fuerint æquales, & tempus idem, actio quoque eadem
" eſſe debet."

Axioma 3.

" Si idem mobile per idem ſpatium transfertur,
" effectus idem eſt."

Scholion.

" Supponimus nempe motum fieri in medio non
" reſiſtente, aut ſaltem abſtrahimus ab actione, quæ
" impenditur in ſuperandam reſiſtentiam medii: id
" quod licet, quamdiu temporis nulla habetur ratio,
" quo effectus producitur."

Theorema 1.

" Si corpora inæqualia eadem celeritate moventur,
" vires ſunt ut maſſæ."

Demonſtrationes hujus, & ſequentium octo theorema-
tum, circa quæ nulla nobis cum *Leibnitianis* eſt contro-

verſia, in ſcripto *Petropolin* miſſo poſueramus verbis *Wolfianis:* hic autem ad evitandam prolixitatem, omittendas cenſuimus.

Theorema 2.

" Actiones uniformes eodem tempore abſolutæ
" ſunt inter ſe ut vires."

Theorema 3.

" Actiones uniformes, viribus æqualibus abſolutæ,
" ſunt inter ſe, ut tempora quibus abſolvuntur."

Theorema 4.

" Actiones uniformes ſunt in ratione compoſita
" temporum & virium."

Theorema 5.

" Vires inæquales eandem actionem abſolvunt tem-
" poribus ſibi reciproce proportionalibus."

Theorema 6.

" Si duo mobilia æqualia per ſpatia inæqualia tranſ-
" feruntur, effectus ſunt ut ſpatia."

Theorema 7.

" Si duo quæcunque mobilia per idem ſpatium
" transferuntur, effectus ſunt inter ſe ut maſſæ eo-
" rundem."

Theorema 8.

" Si duo quæcunque mobilia per ſpatia quæcunque
" transferuntur, effectus ſunt in ratione compoſita
" maſſarum atque ſpatiorum."

Theorema

Theorema 9.

" In motu æquabili, effectus ſunt in ratione com-
" poſita maſſarum, celeritatum atque temporum."

Theorema 10.

" Actiones, quibus idem effectus producitur, ſunt
" ut celeritates."

Pervenimus jam ad illud theorema, in quo totius rei cardo vertitur. Si hoc verum eſt, amplectenda eſt doctrina *Leibnitiana*; ſi minus, repudianda. Itaque diligenter examinanda eſt hujus theorematis demonſtratio.

Ea dividitur a *Wolfio* in tres caſus; ſed cum ſecundus & tertius a primo pendeat, nos hunc unum conſiderabimus.

Demonſtratio Caſus primi.

" Si mobilia fuerint æqualia, & effectus idem di-
" verſo tempore producatur, celeritates erunt ut tem-
" pora reciproce, quibus is producitur; hoc eſt, cor-
" pus, quod tempore $\frac{1}{2}$ T effectum producit, movetur
" celeritate 2 *C*, cum alterum, quod effectum tempore
" T producit, moveatur ſimplici celeritate *C*, atque
" ita porro. Jam evidens eſt, actionem uniformem
" eſſe duplam, quæ dimidio tempore effectum pro-
" ducit, triplam, quæ ſubtriplo, & ita porro, *&c.*"

Ai'n vero, *Wolfi*, evidens eſſe iſtud? ——— Quid ſi negem? Quid ſi dicam actionem, quæ eundem effectum producit, eandem eſſe, quocunque tempore eum producat? Hæc eſt ea ipſa ſuppoſitio *Leibnitiana*, cujus in literis ad *Bernoullium* datis anno 1695, ſe nondum ait inveniſſe modum demonſtrandi a priori; quod in literis ad teipſum datis anno 1711 adhuc demonſtrandum ait. Id tamen tu non conaris

 demonſtrare,

demonſtrare, ſed evidens eſſe ais. Nego evidens eſſe, & corruit tua demonſtratio, corruit ſimul ipſa propoſitio.

Huic autem antequam novam ſubſtituamus, diſpiciendum eſt pauliſper quid per actionem intelligatur, quid per effectum.

Actionis definitionem cl. *Wolfius*, *Leibnitii* exemplo, quod minime factum vellem, omiſit. Docuit ſolum qualis ſit actio *pura*, ſcilicet quæ omni impedimento careat; & qualis actio *uniformis*, nempe quæ creſcat in ratione temporis: quid per actionem ipſam intelligeret, nullibi definivit. Hoc autem niſi fiat, *nihil unquam demonſtrari poterit*, quod olim *Leibnitium*, ſed incaſſum, commonefecerat *Bernoullius*.

Hunc defectum ſi ego ſupplere auſim, quam *Wolfius* definitionem effectus dederit, eandem actioni ipſi tribuerem; quum nihil intereſſe videatur inter actionem & effectum, niſi quod actio, ſi ita loqui liceat, ſit effectus in fieri, effectus autem ſit actio peracta ſive abſoluta. Scilicet, in exemplo *Wolfiano* id agit vis viva, ut transferat mobile per ſpatium; ergo actio vis vivæ *eſt tranſlatio mobilis per ſpatium*; *effectus* etiam vis vivæ *eſt tranſlatio mobilis per ſpatium*; vel, ſi mavis, effectus eſt mobile jam tranſlatum per idem ſpatium.

Generaliter vero, actio eſt productio effectus; vel, ſi mavis, actio eſt qua quid efficitur: effectus autem eſt id ipſum quod efficitur.

Nolim ſane definitiones iſtas pro perfectis venditare: ſed tamen ejuſmodi eſſe cenſeo, ut omni careant erroris periculo, præſertim ſi per exempla aliquot rem planiorem reddiderim.

Si

Si ego paginam unam deſcripſero, actio mea erit deſcriptio unius paginæ, & effectus erit pagina una deſcripta.

Si operarius parietem dealbet, erit ejus actio dealbatio parietis, effectus autem erit paries dealbatus.

Si ruſticus hortum perfodiat, actio ejus eſt horti perfoſſio, effectus autem eſt hortus perfoſſus.

Infinita alia exempla ſibi quiſque excogitare poterit; & ſane puderet rebus tam planis, & quaſi frivolis, tamdiu immorari, niſi hæc ipſa perperam concepta tot magnos viros in graviſſimos errores præcipitâſſent. Scilicet,

Hæ nugæ ſeria ducunt
In mala.

Theorema 10 *noſtrum.*

Actionum æqualium æquales ſunt Effectus.

Abſolvat vis viva quævis *A* actionem quamcunque, & data ſit alia quæcunque vis viva *B*. Jam, ut abſolvat vis viva *B* actionem æqualem actioni vis vivæ *A*, neceſſe eſt tantum præciſe agat vis viva *B*, quantum egerit vis viva *A*. Ergo poſt abſolutam actionem ipſius *B*, tantum erit actum vi *B*, quantum actum fuerit vi *A*; h. e. effectus vis vivæ *B* par erit effectui vis vivæ *A*, quarum actiones fuerint æquales. *Q. E. D.*

Theorema 11 *noſtrum.*

Actiones ſunt in ratione effectuum.

Demonſtratio.

Producatur actione *a* effectus *e*. Ergo alia æquali actione *a*, per *Theor.* 10, producetur alius effectus *e*, priori æqualis: conſequenter, actione bis *a* producetur

effectus bis *e*. Similiter patet actione ter *a* produci debere effectum ter *e*, &c. Immo in genere, actione *na* (=*A*) produci debere effectum *ne* (=*E*). Eſt igitur *A* : *a* :: *E* : *e*, hoc eſt, actiones ſunt in ratione effectuum.

Theorema 12 *noſtrum.*

Vires ſunt in ratione compoſita maſſarum & celeritatum.

Demonſtratio.

Per *Theorema* 4. actiones ſunt in ratione compoſita temporum & virium. Per *Theorema* 11, eædem ſunt in ratione effectuum. Ergo effectus ſunt in ratione compoſita temporum & virium. At per *Theorema* 8, effectus ſunt in ratione compoſita maſſarum atque ſpatiorum. Ergo ratio compoſita temporum et virium par eſt rationi compoſitæ maſſarum atque ſpatiorum. Unde vires ſunt in ratione compoſita maſſarum et ſpatiorum directe, et temporum reciproce; h. e. in ratione compoſita maſſarum et celeritatum. *Q. E. D.*

V. *An Account of Two extraordinary* Deers Horns, *found under-ground in different Parts of* Yorkſhire; *in a Letter from Mr.* Tho. Knowlton, *to Mr.* Mark Catesby, *F. R. S.*

Read March 13. 1745-6.

THE Head and Horns, which is repreſented in TAB. I. *Fig.* 2. were found in a Sand-bed, in the River *Rye*, which runs into the *Derwent*,